Άσκηση 4: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $|f(x)|=1$ $\forall x\in[a,b]$
Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή

Απόδειξη:

Αν η f δεν είναι σταθερή.

Έτσι $\exists x_1,x_2\in[a,b]$ ώστε $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=-1$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα με άκρα τα x_1,x_2 (δηλαδή στο $[x_1,x_2]$ αν $x_1<x_2$ ή στο $[x_2,x_1]$ αν $x_2<x_1$).

Συμπεραίνουμε ότι $\exists \xi$ στο εσωτερικό του παραπάνω διαστήματος (οπότε $\xi\in[a,b]$), ώστε $f(\xi)=0$. Άτοπο, αφού $|f(x)|=1$ $\forall x\in[a,b]$. Άρα, η f είναι σταθερή.

$\xi\in[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$
ή $\xi\in[x_2,x_1]\subseteq[a,b]$

Άσκηση 5: Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $(f(x))^2=(g(x))^2$ $\forall x\in[a,b]$, και $f(x)\neq0$ $\forall x\in[a,b]$. Να δείξουμε ότι $f(x)=g(x)$ $\forall x\in[a,b]$ ή $f(x)=-g(x)$ $\forall x\in[a,b]$.

Απόδειξη:

Εφόσον $(f(x))^2=(g(x))^2$ $\forall x\in[a,b]$

Προκύπτει ότι $\forall x\in[a,b]$ ισχύει $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$.

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα.

Τότε, $\exists x_1,x_2\in[a,b]$ ώστε $f(x_1)=g(x_1)$ και $f(x_2)=-g(x_2)$

Επίσης, εφόσον $(f(x))^2=(g(x))^2$ και $f(x)\neq0$ $\forall x\in[a,b]$

Θα έχουμε $g(x)\neq0$ $\forall x\in[a,b]$

$f(x_1)f(x_2)=-g(x_1)\cdot g(x_2) \Leftrightarrow f=g$ ή $f=-g$.

1η περίπτωση: $f(x_1)f(x_2)<0$

Από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών έχουμε για την f
που είναι συνεχής στο διάστημα με άκρα τα x_1,x_2
υπάρχει ξ στο εσωτερικό του διαστήματος αυτού

(Οπότε $\xi \in [a,b]$) ώστε $f(\xi)=0$. Άτοπο!

<u>2η περίπτωση:</u> $f(x_1) f(x_2)>0$

Τότε, $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$ εφόσον g συνεχής, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

$\exists \xi \in [x_1, x_2] \subseteq [a,b]$ ή $\xi \in [x_2, x_1] \subseteq [a,b]$ ώστε $g(\xi)=0$. Άτοπο!

<u>Άσκηση 6:</u> Έστω $f:[1,5]\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(1)=f(5)$.
Να δείξετε ότι $\exists x,y\in[1,5]$ ώστε $y-x=2$ και $f(x)=f(y)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Ορίζουμε $g:[1,3]\to\mathbb{R}$: $g(x)=f(x+2)-f(x)$

Η συνάρτηση $h(x)=f(x+2)$ είναι συνεχής ως σύνθεση 2 συνεχών.
Της συνεχούς $x\mapsto x+2$ και της f,
και η $g(x)=f(x+2)-f(x)$ είναι συνεχής ως διαφορά 2 συνεχών.

$g(1)=f(3)-f(1)$

$g(3)=f(5)-f(3)=-(f(3)-f(1))=-g(1)$

<u>1η περίπτωση:</u> $g(1)=0$ Θέτουμε $x=1$, $y=3$.

<u>2η περίπτωση:</u> $g(1)\neq 0$. Άρα, $g(1)\cdot g(3)=g(1)\cdot(-g(1))=-(g(1))^2<0$

Η g συνεχής οπότε από το Θεώρημα Bolzano για την g στο $[1,3]$

$\exists x\in[1,3]$ ώστε $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x+2)-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x+2)=f(x)$

Άρα, θέτοντας $y=x+2$ έχουμε το συμπέρασμα.

<u>Άσκηση 7:</u> Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<3\\ 10, & x=3\\ 5x-3, & x>3\end{cases}$

Να δείξουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο 3
α) με χρήση πλευρικών ορίων, β) με αρχή της μεταφοράς

<u>Απόδειξη:</u>

α) $\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} 2x+4=10$, $f(3)=10$, $\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+} 5x-3=12$

Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 3. Είναι συνεχής από δεξιά, αλλά όχι από αριστερά, αφού $f(3)=\lim_{x\to3^-} f(x)$ και $f(3)\neq\lim_{x\to3^+} f(x)$

β) Θέτουμε $x=3+\frac{1}{n}$ τότε $x_n\to3$

$f(x_n)=5(3+\frac{1}{n})-3=12+5\cdot\frac{1}{n}\to12$

$f(x_n)\not\to10=f(3)$ συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο 3.

Άσκηση 8: Να υπολογιστούν τα ακόλουθα όρια.

α) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$, β) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(4x)}{x}$, γ) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

Απόδειξη:

α) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot 5\cancel{x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3\cancel{x}} = \frac{5}{3}$

Εφόσον, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} 5x = 0$, συνεπώς, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 1$

και $5x \neq 0$ για $x \neq 0$.

Ομοίως, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$.

β) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{4x} \cdot 4\sin(4x) = 1\cdot 0 = 0$.

γ) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot(x+1) = 1\cdot 2 = 2$.

Εφόσον, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$

και $x^2-1 \neq 0$ για $0<|x-1|<1$

$\Bigg\}$ $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = 1$ και $\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$

Άσκηση 9: Να εξηγηθεί γιατί η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ είναι συνεχής.

Απόδειξη:

$f(x) = x^2 = e^{\log(x^2)} = e^{x\log x}$

$g(x) = x\log x$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών

η f είναι $f = \exp\circ g$ όπου exp η εκθετική συνάρτηση.

Επομένως, η f συνεχής.

Παρατήρηση: Αν $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με $h(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=h(x)^{g(x)}$ είναι συνεχής

Απόδειξη:

Με παρόμοια επιχειρήματα με το προηγούμενο

$\Rightarrow$ • $\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$ • $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

Θα δείξουμε ότι ισχύουν τα παραπάνω.

Βήμα 1: $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (Θα το αποδείξουμε στο τέλος)

Βήμα 2: $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = e$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^x} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right) =$$

$= e \cdot 1 = e$.

Βήμα 3: $\lim_{t\to-\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

[Άμεσο, από το Βήμα 2, εφόσον $\lim_{t\to-\infty}(-t) = +\infty$.]

Βήμα 4: $\lim_{t\to 0^+} (1+t)^{1/t} = e$.

Απόδειξη:

Από Βήμα 1, εφόσον $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$.

Βήμα 5: $\lim_{t\to 0^-} (1+t)^{1/t} = e$

[Άμεσο, από το Βήμα 3, εφόσον $\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$.]

Βήμα 6: $\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = e$

[Προκύπτει άμεσα από τα Βήματα 4 και 5.]

Εφόσον η συνάρτηση $\log:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, από το τελευταίο όριο προκύπτει:

$\lim_{t\to 0} \log(1+t)^{1/t} = \log(e)$

δηλαδή $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$

Επίσης, $\lim_{y\to 1}(y-1)=0$, προκύπτει $\boxed{\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}=1}$

Η εκθετική είναι συνεχής συνάρτηση, άρα $\lim_{t\to 0} e^t = 1$.

Επίσης, για $t\neq 0$, $e^t \neq 1$.

Άρα, $\lim_{t\to 0}\frac{\log(e^t)}{e^t-1}=1 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1 \Rightarrow \boxed{\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1}$

<u>Απόδειξη Βήματος 1:</u>

Για $x>1$: $1\leq [x] \leq x \leq [x]+1$

$$\Rightarrow \frac{1}{[x]+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{x} \leq \underline{\underline{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}} \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}$$

Επίσης, $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$ και $\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e$.

Έστω $\varepsilon>0$.

$\left.\begin{array}{l}\exists n_1\in\mathbb{N} \text{ ώστε } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon \quad \forall n\geq n_1 \\ \exists n_2\in\mathbb{N} \text{ ώστε } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} > e-\varepsilon \quad \forall n\geq n_2\end{array}\right\}$ Θέτω $n_0=\max\{n_1,n_2\}$

Για $x\geq n_0$ οπότε $[x]\geq n_0$.

Θα έχουμε $e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e+\varepsilon \Rightarrow \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right|<\varepsilon$

Επομένως, $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

➡ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log a}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\cdot \log a = 1\cdot \log a = \log a$.

$a>0$ και $a\neq 1$

$a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x\log a}$ $\qquad \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$ και $\lim_{x\to 0}\log a\cdot x = 0$

➡ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 1\cdot 1 = 1$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Επίσης } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \\ \text{και } \lim_{x\to 0}\sin x = 0 \text{ και } \sin x\neq 0 \\ \qquad\qquad 0<|x|<\pi/2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=1$.

➡ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x\sin(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-2\sin^2x-\cancel{1}}{x\sin(2x)} =$

$$\cos(2x) = \cos^2x - \sin^2x = 2\cos^2x-1 = 1-2\sin^2x$$

$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2x}{x\,2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-1}{\cos x} = 1\cdot\frac{-1}{1} = -1$

<u>Άσκηση:</u> Έστω α, β, γ τρεις θετικοί αριθμοί και $\lambda<\mu<\nu$.
Να δείξουμε ότι η εξίσωση: $\frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}=0$ (I)
έχει λύση σε καθένα από τα διαστήματα (λ,μ) και (μ,ν).

<u>Απόδειξη:</u>

(I) $\Leftrightarrow \alpha(x-\mu)(x-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)=0$

Θέτουμε $f(x)=\alpha(x-\mu)(x-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)$ που ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

$f(\lambda)=\alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)>0$
$f(\mu)=\beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu)<0$
} Από το Θεώρημα Bolzano $\exists x_0\in(\lambda,\mu)$ ώστε $f(x_0)=0$
$\Rightarrow$ Το x_0 επαληθεύει την (I).

Ομοίως για το διάστημα (μ,ν).

<u>Άσκηση:</u> Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $x_1,x_2,x_3,x_4\in[a,b]$
Να δείξουμε ότι $\exists\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$

<u>Υπενθύμιση:</u> Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή, $\exists x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x)\leq \underset{M}{f(x_0)}$ $\forall x\in[a,b]$ και $\exists y_0\in[a,b]$ ώστε $f(x)\geq \underset{m}{f(y_0)}$ $\forall x\in[a,b]$
Επιπλέον, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, για κάθε ρ με $m\leq\rho\leq M$ $\exists z\in[a,b]$ ώστε $f(z)=\rho$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $M=f(x_0)$ η μέγιστη τιμή της f στο $[a,b]$ και $m=f(y_0)$ η ελάχιστη τιμή της f στο $[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} m\leq f(x_1)\leq M \\ m\leq f(x_2)\leq M \\ m\leq f(x_3)\leq M \\ m\leq f(x_4)\leq M \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4m\leq f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\leq 4M \Rightarrow \\ \Rightarrow m\leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}\leq M \end{array}$$

Συνεπώς, $\exists\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$

<u>Άσκηση:</u> Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, $a\in\mathbb{R}$ και ορίζουμε αναδρομικά μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής: $a_1=a$ και $a_{n+1}=f(a_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
Υποθέτουμε πως η (a_n) είναι συγκλίνουσα με $a_n\to x$.
Να δείξουμε ότι $f(x)=x$.

<u>Απόδειξη:</u>

$a_n\to x \xrightarrow[\text{στο } x]{f \text{ συνεχής}} f(a_n)\to f(x) \Rightarrow \boxed{a_{n+1}\to f(x)}$

$a_n\to x\Rightarrow \boxed{a_{n+1}\to x}$

Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας προκύπτει $\boxed{f(x)=x}$